ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUE

Durée : 3 heures

Coef. : 1

1°) On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions polynômes, de la variable réelle s , définie par :

$P_0(s) = 1$ et, $\forall\, n \geq 1$, $P_n(s) = \dfrac{s(s+n)^{n-1}}{n!}$

a) Si P'_n désigne la dérivée de P_n , vérifier, pour $n > 0$, la relation

$$P'_n(s) = P_{n-1}(s+1)$$

b) Utilisant cette relation, démontrer par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(s+t) = \sum_{p=0}^{n} P_p(s)\, P_{n-p}(t)$$

2°) Dans cette question on admettra que si les séries numériques de termes généraux respectifs u_n et v_n , $n = 0, 1 \ldots\ldots$, sont absolument convergentes et de sommes respectives U et V , alors la série de terme général

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p\, v_{n-p}$$

est absolument convergente et admet UV pour somme.

.../...

a) x étant réel, déterminer pour tout réel s le rayon de convergence R de la série entière de terme général $P_n(s)\, x^n$.

b) Pour tout $x \in]-R , + R[$ et pour tout réel s , on pose

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(s) x^n \quad ;$$

démontrer que pour tout réel t on a :

$$f_{s+t}(x) = f_s(x)\, f_t(x) \ .$$

c) En déduire, pour tout réel s et pour tout entier $N \geq 1$, l'expression de $f_{Ns}(x)$ en fonction de $f_s(x)$, puis pour $x \in]-R, + R[$ l'inégalité $f_s(x) \geq 0$ et, enfin, l'expression de $f_{\frac{s}{N}}(x)$ en fonction de $f_s(x)$.

d) Déterminer, en fonction de $f_s(x)$, la limite lorsque N tend vers l'infini de

$$N \left[f_{\frac{s}{N}}(x) - 1 \right] \ .$$

3°) a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{n^{n-1}}{n!} x^n$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$; lorsque cette série converge on désigne sa somme par g(x) ; déterminer le développement en série entière de

$$N \left[f_{\frac{s}{N}}(x) - 1 \right] - s g(x)$$

et montrer que le rayon de convergence de ce développement n'est pas nul.

b) Admettant pour l'instant l'inégalité

$$\left| N \left[f_{\frac{s}{N}}(x) - 1 \right] - s g(x) \right| \leq \frac{1}{N} \left[f_{|s|}(|x|) - 1 - |s|\, g(|x|) \right]$$

donner une nouvelle expression de la limite, lorsque N tend vers l'infini de

$$N \left[f_{\frac{s}{N}}(x) - 1 \right] \ .$$

4°) Dans le cas particulier où s = 1, on pose $f(x) = f_1(x)$.

a) En comparant les résultats du 2°) d) et du 3°) b), établir une expression de $f_s(x)$ en fonction de s et de f(x).

b) Démontrer que $xf(x) = g(x) = \text{Log } f(x)$ et en déduire deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que f définisse une bijection de I sur J.

ϕ désignant la bijection réciproque de f , donner l'expression de $\phi(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Etudier les variations de la fonction ϕ définie pour $x \in]0, + \infty[$ par

$$\phi : x \to \phi(x) = \frac{\text{Log } x}{x} \ .$$

d) Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'axes x'Ox , y'Oy , dessiner la courbe représentative (C) de la fonction ϕ, et en déduire la courbe représentative (Γ) de la fonction $f : x \to f(x)$.

e) Calculer l'aire du domaine D du plan délimité par (Γ), l'axe Ox, l'axe Oy et la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$.

5°) a) h étant un réel donné et x une variable strictement positive, montrer que $(x + h)^{n-1} - x^{n-1}$ est une fonction croissante de x ; en déduire que pour tout réel s et tout entier $n > 0$, l'entier N étant supérieur ou égal à s, on a :

$$\left| (n + \frac{s}{N})^{n-1} - n^{n-1} \right| \leq (n + \frac{|s|}{N})^{n-1} - n^{n-1} \ .$$

b) Vérifier que $(n + t)^{n-1} - n^{n-1} = \sum_{k=1}^{N} (n + \frac{kt}{N})^{n-1} - (n + \frac{(k-1)t}{N})^{n-1}$;

et établir alors l'inégalité admise au 3°) b).

NB La question 5 a été annulée